12. Hausübung zur Physik I Abgabe: Di 13.01.09

Aufgabe 45: Zeigen Sie explizit, dass die folgenden Funktionen die Wellengleichung erfüllen: ③

a) $y(x,t) \;=\; k\,(x+\nu t)^3$

b) $y(x,t) \;=\; A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-\nu t)}$, wobei A und k Konstanten sind und $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$

c) $y(x,t) \;=\; \ln[k\,(x-\nu t)]$

Aufgabe 46: Eine stationäre Radarquelle strahlt Mikrowellen mit einer Frequenz $\nu_R = 2.00$ GHz aus. Wenn die Wellen von einem Auto reflektiert werden, das sich direkt von der Strahlungsquelle weg bewegt, wird eine Frequenzdifferenz von 293 Hz registriert. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Autos. ②

Aufgabe 47: In einem Lehrbuch der Theoretischen Physik [Landau & Lifschitz Band I §12] findet sich (geringfügig umgestellt) die folgende Passage: ②

$$\gg \text{ Das Integral } \quad J \;:=\; \int_U^\alpha \frac{\mathrm{d}E}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}} \quad \text{ ist elementar und gleich } \pi\ . \ \ll$$

Bitte mit Hilfe elementarer Umformungen und der Kenntnis $\partial_x \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ohne Blick in den Bronstein nachvollziehen!

Hinweis: $(\alpha-E)(E-U) \;=\; (\frac{\alpha-U}{2})^2 \;-\; (E-\frac{\alpha+U}{2})^2$.

Aufgabe 48: ④

(a) Eine ebene Kurve sei durch $\vec{r}(t) \doteq (t, f(t))$ mit $a \le t \le b$ gegeben. Zeigen Sie, dass sich die Bogenlänge durch $L = \int_a^b \mathrm{d}t\ \sqrt{1+(f'(t))^2}$ berechnen lässt.

(b) In Polarkoordinaten wird eine ebene Kurve dargestellt durch $\vec{r}(\varphi) \doteq (r(\varphi)\cos\varphi\,,\ r(\varphi)\sin\varphi)$ mit $a \le \varphi \le b$. Beweisen Sie, dass die Bogenlänge durch $L = \int_a^b \mathrm{d}\varphi\ \sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}$ gegeben ist.

(c) Berechnen Sie so die Bogenlängen der folgenden Kurven und skizzieren Sie deren Spur:

1. $f(t) = a\cosh\frac{t}{a}\,,\quad 0 \le t \le t_0,\ a>0$ (Stück einer Kettenlinie)
2. $r(\varphi) = a\,\varphi\,,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ a>0$ (Stück einer archimedischen Spirale)
3. $r(\varphi) = a\,(1+\cos\varphi)\,,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ a>0$ (Kardioide)

Aufgabe 49: Mit billigem Nachtstrom wird eine Feder (κ,ℓ) auf die Länge a gedehnt. Am Morgen zieht sie dann einen Nahverkehrszug auf der skizzierten elliptischen Schiene $\mathcal{C}$ von Punkt 1 nach Punkt 2. Die dabei verrichtete Arbeit soll explizit als Kurvenintegral ausgewertet werden. ④

Hinweise: Die Substitution $r(t)=u$ erledigt das Integral.
Das Ergebnis ist klar wegen Energieerhaltung: $A = \frac{1}{2}\kappa\,(a-\ell)^2$.